

$\mathbb{R}^2$ σημεία (x, y) , $x, y \in \mathbb{R}$

Ευθείες $\{(x, y) \mid ax + by + \gamma = 0, (a, b) \neq (0, 0)\}$

Υποσέτουμε ότι αξιώμα της παραλλήλωσης

Έστω $(\varepsilon_1): a_1x + b_1y + \gamma_1 = 0$, $(a_1, b_1) \neq (0, 0)$

Έστω ότι $P_0(x_0, y_0) \notin (\varepsilon_1)$

ΥΠΑΡΞΗ: Παρατηρούμε ότι υπάρχει η $(\varepsilon_1): a_1x + b_1y + (-a_1x_0 - b_1y_0) = 0$

Προφανώς, $P_0 \in (\varepsilon_1)$. Θ.Σ.Ο. $(\varepsilon) \parallel (\varepsilon_1)$

Έστω, αντίθετα ότι $\exists P' (x', y')$ το οποίο $\in (\varepsilon), (\varepsilon')$

$$\left. \begin{array}{l} (\varepsilon') : a_1x + b_1y + \gamma_1 = 0 \\ (\varepsilon) : a_1x + b_1y + (-a_1x_0 - b_1y_0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma_1 = (-a_1x_0 - b_1y_0)$$

ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ: $(\varepsilon_1): a_1x + b_1y + \gamma_1 = 0$, $(a_1, b_1) \neq (0, 0)$

$$(\varepsilon): a_1x + b_1y + (-a_1x_0 - b_1y_0) = 0 \quad P_0^0(x_0, y_0)$$

Έστω ότι $\exists (\varepsilon_2): a_2x + b_2y + \gamma_2 = 0$, $(a_2, b_2) \neq (0, 0)$

$$P_0(x_0, y_0) \in (\varepsilon_2) \quad (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_1)$$

υπάρχει $P_0 \in \begin{pmatrix} (\varepsilon) \\ (\varepsilon_2) \end{pmatrix} \left(\begin{array}{l} \text{είναι 2 ευθείες} \\ \text{έχουν το ίδιο σημείο} \\ \text{και το σημείο} \end{array} \right) \Rightarrow \text{Το } P_0 \text{ βρίσκεται} \\ \text{και στο ευθείο τους}$

$$(\Sigma): \begin{cases} a_1x + b_1y + (-a_1x_0 - b_1y_0) = 0 \\ a_2x + b_2y + \gamma_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Το } (\Sigma) \text{ έχει μοναδικό λύση}$$

$$\Rightarrow \det \Sigma \neq 0 \quad \begin{pmatrix} | & a_1 & b_1 \\ | & a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$(\Sigma) \begin{pmatrix} (\varepsilon_1) \\ (\varepsilon_2) \end{pmatrix} \det \Sigma' = \det \Sigma \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \det \Sigma' \neq 0 \Rightarrow \text{το } \Sigma' \text{ έχει διάνυσμα}$$

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

$$A * B * \Gamma$$

Δ1: Αν $A * B * \Gamma$, τα A, B, Γ διαφορετικά μεταξύ τους βρίσκονται στην ίδια μοναδική ευθεία και $\Gamma * B * A$

Δ2: Ανάμεσα σε δύο διαφορετικές ευθείες, υπάρχει (ζήτη) ευθεία.

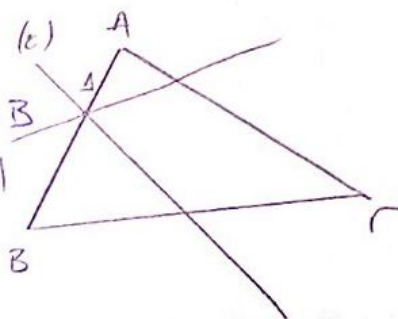
Δ3: Δοθέντος τριών διαφορετικών ευθειών, το ένα εφίπυεζαι ανάμεσα στα άλλα δύο (σε μια ευθεία)

Δ4: (Pasch) Έστω A, B, Γ μη συνευθειακά (ε)

1882

με (ε) να διέρχεται από ευθεία Δ : $A * \Delta * B$

και η (ε) να διέρχεται από A, B, Γ



$\Rightarrow$ Γίτε η (ε) θα διέρχεται από ευθεία E $A * E * \Gamma$

Γίτε η (ε) $\parallel$ E $B * E * \Gamma$

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ

i για ευθυγράβιστα τμήματα

ii για γωνίες

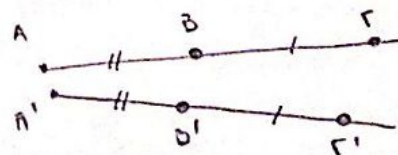
I1 Για ευθυγράβιστα τμήματα AB και ημιευθεία με A αρχή το Γ υπάρχει μοναδικό Δ : $AB = \Gamma\Delta$
(και αντιστρέφεται παρόμοια)



I2 αν $AB = \Gamma\Delta$ και $AB = \epsilon\zeta$ για ευθ. τμήματα $AB, \Gamma\Delta, \epsilon\zeta$ τότε $\Gamma\Delta = \epsilon\zeta$.
Ειρήκεον κάθε ευθυγράβιστο τμήμα είναι ίσο με τον εαυτό του.

I3 (αξίωμα της προσθεσης) αν $A * B * \Gamma$, $A' * B' * \Gamma'$

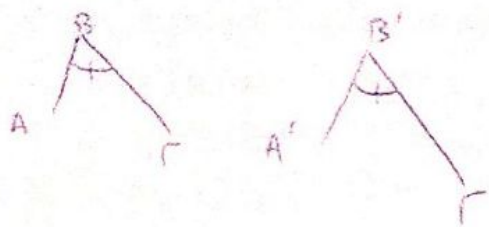
και $AB = A'B'$, $B\Gamma = B'\Gamma' \Rightarrow A\Gamma = A'\Gamma'$ (αξίωμα της προσθεσης)



$A * B * \Gamma$ είναι ότι το B είναι ανάμεσα σε A, Γ

I4: Έστω γωνία $\hat{A}B\Gamma$ και η κεντρική $\hat{A}'B'\Gamma' \Rightarrow \exists \Gamma'$ (υποκείμενο ως προς 2 ημετέροπες ως $A'B'$)

$$\hat{A}'B'\Gamma' = \hat{A}B\Gamma$$



I5: Αν $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ και $\hat{\beta} = \hat{\gamma} \Rightarrow \hat{\alpha} = \hat{\gamma}$. Συνέπεια, κάθε γωνία είναι με τον εαυτό της

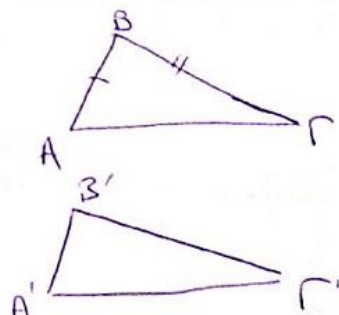


I6: Έστω τρίγωνα $\hat{A}B\Gamma, \hat{A}'B'\Gamma' : AB = A'B', B\Gamma = B'\Gamma',$ και $\hat{A}B\Gamma = \hat{A}'B'\Gamma'$
 $\Rightarrow \hat{B}A\Gamma = \hat{B}'A'\Gamma'$ και $B'A = B'\Gamma'A$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω τρίγωνα $\hat{A}B\Gamma, \hat{A}'B'\Gamma' : AB = A'B', B\Gamma = B'\Gamma'$ και $\hat{A}B\Gamma = \hat{A}'B'\Gamma'$
 Τότε $\hat{A}B\Gamma = \hat{A}'B'\Gamma'$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Από (I6) μένει ν.δ.ο. $AB = A'\Gamma'$ έστω αντίθετοι ότι $AG < A'\Gamma'$ και λόγω $AG < A'\Gamma'$

$\Rightarrow$ από (I1) υπάρχει (μοναδικό) Δ ώστε $A'\Gamma' = A'\Delta$



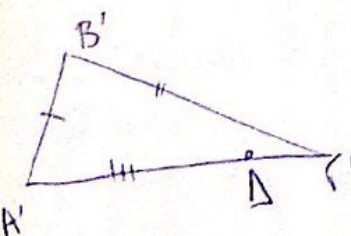
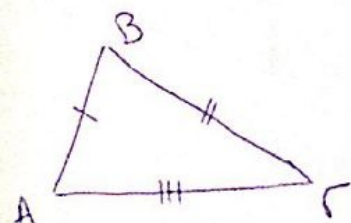
Κοιτάμε τα τρίγωνα $\hat{A}B\Gamma, \hat{A}'B'\Delta$

$AB = A'B'$ και από (I6)

$$\textcircled{*} AG = A'\Delta$$

$$\hat{B}A\Gamma = \hat{B}A\Delta$$

$$\left(\begin{array}{c} \hat{A}B\Gamma \\ \hat{A}'B'\Gamma' \end{array} \right)$$



ΟΡΙΣΜΟΣ: Ορίζεται ως ένα σύνολο E τα στοιχεία αυτών που (δυναμικώς) καλούνται διανύσματα, εφοδιασμένα με 2 πράξεις:

χώρος των προτύπων. (+) $E \times E \rightarrow E$
 $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto (\vec{u} + \vec{v})$
 > τα βασικά πολλαπλασιαστικά $\lambda \in \mathbb{F}, \vec{u} \in E \rightarrow \lambda \vec{u} \in E$
 $\mathbb{F} \times E \rightarrow E$
 $(\lambda, \vec{u}) \mapsto \lambda \vec{u}$

- 1) $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E$
 - 2) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x} \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in E$
 - 3) $\exists \vec{0} \in E: \vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x} \in E$
 - 4) $\forall \vec{x} \in E: \exists -\vec{x} \in E: \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$
 - 5) $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{F} (\mathbb{R})$
 - 6) $(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}, \forall \lambda, \mu \in (\mathbb{R})$
 - 7) $(\lambda\mu)\vec{x} = \lambda(\mu\vec{x}) \quad \forall \lambda, \mu \in (\mathbb{R})$
 - 8) $\exists \vec{1} \in E: \vec{x} \cdot \vec{1} = \vec{1} \cdot \vec{x} = \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in E$
- } $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$
 $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

1.1.

1) $\mathbb{R}^2$, όπου "+", $\vec{k} = (x_1, y_1), \vec{\lambda} = (x_2, y_2)$
 $\Rightarrow \vec{k} + \vec{\lambda} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
 $k \in \mathbb{R}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow k \cdot \vec{0} = (kx, ky) \in \mathbb{R}^2$

Έστω $E = \left\{ \begin{array}{l} \text{χώρος των συνεχών} \\ \text{συναρτήσεων} \end{array} \right\}$

το σύνολο $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{pmatrix}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω E S.χ. και $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in E$. Τα $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ καλούνται γραμμικά εξαρτημένα αν-ν $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}$

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0} \quad (0, 0, \dots, 0)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{αν } \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0} \Rightarrow \\ \text{Τα } \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \text{ λέγονται γραμμικά ανεξάρτητα} \end{array} \right)$$

π.χ. 1) Έστω $(1, 2), (3, 6) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{Έστω } \lambda_1(1, 2) + \lambda_2(3, 6) = (0, 0) \Rightarrow$$

$$(\lambda_1, 2\lambda_1) + (3\lambda_2, 6\lambda_2) = (0, 0) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Αν λίσω το παραπάνω σύστημα για $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, άρα τα διανύσματα θα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Ⓐ $(1, 2), (3, 7)$

$$\text{Έστω } \lambda_1(1, 2) + \lambda_2(3, 7) = (0, 0) \Rightarrow$$

$$(\lambda_1 + 3\lambda_2, 2\lambda_1 + 7\lambda_2) = (0, 0) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 7\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Πάντα (για Γ.Α. ή Γ.Ε.) έχω ορισμένους τρόπους έχω μεθόδους να πω (για Γ.Α. ή Γ.Ε.)

ΠΡΟΤΗΣΗ: Αν έχει μόνο $\det Z \neq 0$, όπου $\det Z = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

τότε είναι Γ.Α;

αν όχι $\Rightarrow$ Γ.Ε. $(\Rightarrow \det Z = 0)$

(B) $(1, 2), (3, 6)$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0 \rightarrow \Gamma \in$$

(Γ) Έστω $(1, 2, 5, 7), (2, 3, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→ αντιστοιχεί στην η βαθμίδα $\text{rank}(A)$
 καθώς εχ' ορισμού
 $\text{rank}(A) = \mu \in \mathbb{R}^n$ πλῆθος Γ.Α.
 γραμμών (η στήλες)